Günther Malle, Esther Ramharter, Andreas Ulovec, Susanne Kandl

Mathematik verstehen - ein modernes Lehrbuchkonzept

MATHEMATIK VERSTEHEN

LEHRBUCH

- **didaktisch orientiert**
  - Ergebnis langjähriger didaktischer Forschung
  - Sicherstellung mathematischer Grundbildung
- **unterrichtspraktisch orientiert**
  - Für Schüler lesbar
  - Klare Gliederung
  - Geradlinige Zugänge
  - Trennung der Aufgaben in Grundaufgaben und weiterführende Aufgaben
  - Viele Parallelaufgaben
- **computerorientiert**
  - Sinnvoller (!) Computereinsatz als mögliche Ergänzung

LÖSUNGSHEFT

- enthält die Lösungen der Aufgaben und einige vorgerechnete Aufgaben

COMPUTER-BEGLEITHEFT

- Spezifisch an das Lehrbuch angepasst
- Für Schüler verständlich geschrieben

INTERNETANGEBOT

- **Ringmappe**
  - Aufgaben- und Arbeitsblätter
  - Kopiervorlagen
  - Leicht realisierbare Projektvorschläge
  - Texte zum didaktischen Hintergrund
- **Didaktische Software zum Lehrbuch**
  - spezifisch auf das Lehrbuch abgestimmt, unter didaktischen Gesichtspunkten entwickelt
- **Kommunikationsplattform**

Abb. 1 Übersicht über das Lehrwerk

1. Gründe für ein neues Lehrbuch

Warum ein neues Lehrbuch? Dazu hat es viele Gründe gegeben. Ein äußerer Anlass war der **neue Lehrplan**, der die Verlage veranlasst hat, zu reagieren. Es gab jedoch auch tiefergehende Anlässe: Die Zeiten haben sich geändert. Die Schule hat sich geändert. Die

Fortschritte der wissenschaftlichen Mathematikdidaktik können nicht mehr ignoriert werden. De facto ist es so, dass die Schere zwischen dem, was die wissenschaftliche Mathematikdidaktik anzubieten hat und dem, was die Lehrerinnen und Lehrer an den Schulen wirklich erreicht, immer größer wird. Aus all diesen Gründen erschien es uns unverantwortlich, bestehende Lehrbücher unverändert weiterzuführen.

Zu den genannten Anlässen kommt noch als ein ganz wesentlicher Anlass hinzu, dass unsere Oberstufenschüler bei diversen nationalen und internationalen Evaluationsstudien (TIMSS, PISA etc.) nicht gut abgeschnitten haben. Im Einzelnen mag man diese Studien kritisch bewerten, aber das Signal ist eindeutig. Die Studien zeigen, dass eine gewisse **mathematische Grundbildung**, die man bisher als selbstverständlich vorhanden voraussetzte, nicht in wünschenswertem Ausmaß vorhanden ist. Dagegen wollten wir etwas unternehmen.

2. Aufbau des Lehrwerks

Der Aufbau kann der Übersicht zu Beginn des Artikels entnommen werden. Es fällt zunächst auf, dass das gesamte Lehrwerk aus zwei Teilen besteht, nämlich aus einem **gedruckten Teil**, bestehend aus dem **Lehrbuch**, dem **Lösungsheft** und dem **Computerbegleitheft**, und einem **Internetangebot**, bestehend aus einer **Ringmappe,** einer **Kommunikationsplattform** und **didaktischer Software**, die eigens für dieses Lehrwerk entwickelt wurde.

Diese Zweiteilung hat einen sehr tief liegenden Hintergrund. Es verbirgt sich nämlich dahinter ein Problem, mit dem sich heute jedes seriöse Lehrbuchteam auseinandersetzen muss. Der moderne Mathematikunterricht leidet an einem inneren Zwiespalt. Auf der einen Seite wird vehement die **Absicherung der mathematischen Grundbildung** gefordert. Diese erreicht man am besten durch kurze, geradlinige Zugänge, die direkt und ohne Umschweife auf das Wesentliche lossteuern, ohne links und rechts zu blicken. Jedes Abweichen von dieser Geradlinigkeit lenkt die Aufmerksamkeit der Lernenden nur vom Wesentlichen ab und macht die Sache ineffizienter. Auf der anderen Seite gibt es genauso vehemente Forderungen nach einem **offenen, projektartigen Lernen** (Stichworte: projektartiger Unterricht, offenes Lernen, Öffnen von Aufgaben usw.). Dabei geht es vor allem um so genannte höhere Lernziele wie etwa die Fähigkeit zum kreativen Arbeiten, zum Problemlösen, zum Darstellen, zum Interpretieren, zum Begründen usw. Es geht auch um soziale Lernziele wie Entscheidungsfähigkeit, Handlungskompetenz, Verantwortungsbewusstsein, Urteilsfähigkeit und vieles andere (siehe die Forderungen des Lehrplans). Diese Art des Lernens erfordert das genaue Gegenteil von Geradlinigkeit. Hier soll man geradezu abschweifen, links und rechts schauen, den Weg nicht im Detail vorherplanen, ja sogar riskieren, dass die Schülerinnen und Schüler einen anderen Weg einschlagen als man selbst geplant hat.

Diese beiden Ziele, Geradlinigkeit und projektartige Offenheit, sind beide wichtig, man kann sie aber nicht gleichzeitig im Unterricht anstreben – und man kann sie auch nicht beide gleichzeitig in einem Lehrbuch realisieren. Das stellt ein Lehrbuchteam vor eine kaum zu lösende Aufgabe. Schreibt man ein Lehrbuch, das nur kurze, geradlinige Zugänge enthält, dann regen sich jene auf, die sich ein offenes, projektartiges Lernen wünschen. Schreibt man jedoch das Lehrbuch in einem offenen, projektartigen Stil, dann geht das Wesentliche der Grundbildung unter Umständen bis zur Unkenntlichkeit verloren und eine Absicherung der Grundbildung kann nicht mehr garantiert werden.

Wie soll man also mit diesem Problem umgehen? Wir haben uns nach langem Nachdenken dazu entschlossen, in dem gedruckten Lehrbuch eher die geradlinigen, kurzen Zugänge zu den einzelnen Inhalten zu wählen und die Unterlagen zu offenem, projektartigem Arbeiten im

Internet anzubieten. Diese beiden Schienen sollen im Folgenden etwas näher beschrieben werden.

2.1 Das Lehrbuch

Das gedruckte Lehrbuch zeichnet sich durch drei Orientierungen aus:

a) Didaktische Orientierung:
Auch wenn man es nicht an jedem Detail gleich erkennt, ist das Buch ein Ergebnis langjähriger didaktischer Forschung. Man kann mit gutem Gewissen sagen, dass es auf dem neuesten Stand der Mathematikdidaktik steht und wichtige Forschungsergebnisse einbezieht. Insbesondere ist es ein Produkt der derzeit hochaktuellen Diskussion um die mathematische Grundbildung. Das Buch ist so angelegt, dass die infolge von TIMSS, PISA und anderen Studien eingeforderte Grundbildung nicht nur vermittelt, sondern sichergestellt wird und damit eine Basis für ein besseres Abschneiden bei zukünftigen Untersuchungen sein kann.

b) Unterrichtspraktische Orientierung:
Die Autoren haben sich bemüht, ein Lehrbuch zu schaffen, das in hohem Ausmaß **unterrichtspraktikabel** ist. Das gesamte Buch ist in einer klar verständlichen Sprache geschrieben, so dass es auch **für Schülerinnen und Schüler lesbar** ist. Es weist eine **klare Gliederung** auf, sodass man an jeder Stelle weiß, was gerade gespielt wird. Viele Beobachtungen zeigen, dass eine klar gegliederte Darbietung des Lehrstoffes effizienter ist als eine ungegliederte Darbietung und dafür gibt es mittlerweile auch schon Bestätigungen aus der empirischen Forschung. Eine klare Gliederung erleichtert den Lehrerinnen und Lehrern auch das Unterrichten. Sie müssen weniger Anstrengung in die Vorbereitung investieren, finden Aufgaben schneller, können spontaner unterrichten und müssen trotzdem nicht fürchten, in ein Durcheinander zu kommen oder wesentliche Teile zu übersehen.

Wie schon vorhin erwähnt, enthält das Lehrbuch vorwiegend **geradlinige Zugänge** zu den einzelnen Stoffgebieten. Die Autoren haben sich bemüht, die Zugänge zu den Inhalten so kurz wie möglich zu gestalten, aber nicht so kurz, dass dabei wesentliche Aspekte verloren gehen. Häufig wird mit einer Aufgabe begonnen (ein Vorgehen, das die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler fördert und sich sehr bewährt hat). Diese Aufgabe enthält oft schon alle wesentlichen Punkte, die bei dem betreffenden Inhalt wichtig sind, wenngleich zunächst nur in einem speziellen Kontext. Aus dieser Aufgabe ergibt sich dann eine allgemeine Behandlung der wichtigen Punkte und deren Formulierung in der Sprache der Mathematik. Zahlreiche Anwendungen schließen meist das Thema ab.

Ein Spezifikum dieses Buches besteht darin, dass die Aufgaben in **Grundaufgaben** und **weiterführende Aufgaben** getrennt sind. Auch diese Trennung soll das Unterrichten erleichtern. Die Grundaufgaben sind eher einfach und stellen jene Aufgaben dar, die die geforderte mathematische Grundbildung sicherstellen sollen. Mit anderen Worten: Es wird erwartet, dass Schülerinnen und Schüler, die eine mathematische Grundbildung für sich in Anspruch nehmen, diese Aufgaben lösen können. Dazu muss man nicht alle diese Aufgaben im Unterricht behandelt haben. Denn im Allgemeinen finden sich unter diesen Aufgaben viele **Parallelaufgaben** und **Analogaufgaben**. Die weiterführenden Aufgaben sind entweder anspruchsvoller oder beziehen sich schlichtweg auf Dinge, die nicht unbedingt zur Grundbildung gezählt werden können. Im Extremfall könnte man alle weiterführenden Aufgaben auslassen und hätte damit trotzdem den Lehrplan erfüllt sowie die mathematische Grundbildung sichergestellt.

d) Computerorientierung:
Grundsätzlich ist das Buch ohne Einsatz eines Computers verwendbar. An einigen Stellen weisen wir jedoch darauf hin, wie der Computer als sinnvolle Ergänzung eingesetzt werden kann. Die Betonung liegt dabei auf „sinnvoll". Es wird kein Computerunterricht auf Biegen oder Brechen angestrebt, sondern der Computer soll dort verwendet werden, wo es auch wirklich Sinn macht.

2.2 Das Internetangebot

Im Internet werden verschieden **Materialien zu eher offenem Lernen** angeboten: Aufgabenblätter, Arbeitsblätter, Kopiervorlagen, Projektvorschläge, Hintergrundtexte. Hier sollen verschiedene Wünsche abgedeckt werden. Wer auf die Schnelle eine Schularbeitsaufgabe sucht, wird diese genauso finden wie jemand, der anstelle eines kurzen Zugangs zu einem Stoffgebiet einen alternativen, projektartigen Zugang ausprobieren möchte. Jede Lehrperson, die dieses Lehrbuch im Unterricht verwendet, bekommt vom Verlag eine ansprechend gestaltete **Ringmappe** zur Verfügung gestellt, in die man die ausgedruckten Internetmaterialien einheften kann. Diese Materialien werden laufend ergänzt und im Lauf der Zeit wird dabei sehr viel an Materialien zusammenkommen.

Einen besonderen Schwerpunkt bilden dabei die angebotenen **Projektvorschläge**, die nach ganz neuen Gesichtspunkten gestaltet sind und auch bereits mehrfach erprobt wurden. Die vorgeschlagenen Projekte sind alle so aufbereitet, dass sie ohne großen Aufwand im Unterricht realisiert werden können. Es bedarf keiner mühsamen Datensammlung oder sonstiger aufwändiger Vorbereitung. Alle notwendigen Informationen werden in eigenen **Infoblöcken** zur Verfügung gestellt, die die Schülerinnen und Schüler durchlesen können. Der Ablauf wird im Wesentlichen durch **Arbeitsaufträge** organisiert, die zwar klar formuliert sind, jedoch mehr oder weniger offene Bearbeitungen zulassen. Bei jedem Arbeitsauftrag schildern wir kurz einige Möglichkeiten der Bearbeitung, sodass für die Lehrerinnen und Lehrer auch hier keine großen Vorbereitungen anfallen. Zur Unterstützung dieser Arbeitsaufträge bieten wir gelegentlich auch **Aufgabenblätter** oder **Arbeitsblätter** an, wenn eine spezielle Sache geübt werden soll. Wer sich einige konkrete Beispiele anschauen möchte, sei auf die Homepage des Lehrwerks (http://www.mat.univie.ac.at/mv) verwiesen.

Neben einer **Kommunikationsplattform**, auf der man mit den Autoren kommunizieren kann, bieten wir über unsere Homepage auch **didaktische Software** an, die speziell zur Arbeit mit diesem Lehrbuch entwickelt wurde. Auch diese wird laufend ergänzt werden.

3. Sicherung von Grundbildung

Wie schon mehrfach betont, ist die Sicherung einer gewissen mathematischen Grundbildung ein wesentliches Anliegen des Lehrwerks. Dies ist eine Reaktion auf die derzeit hochaktuelle Diskussion um mathematische Grundbildung (die sich auch in staatlich geförderten Projekten wie beispielsweise dem deutschen PALMA-Projekt oder dem österreichischen IMST-Projekt niederschlägt). Insbesondere geht es um die Sicherstellung eines gewissen mathematischen **Grundwissens** und die Entwicklung von **Grundvorstellungen** zu einzelnen Inhalten des Mathematikunterrichts. An der Universität Wien wurden in den letzten zehn Jahren umfangreiche empirische Untersuchungen zu Grundvorstellungen durchgeführt. Dabei wurden die wichtigsten Stoffgebiete der Schulmathematik abgedeckt und insgesamt über 2500 Schüler untersucht. In diesen Untersuchungen haben sich leider die schon erwähnten negativen Ergebnisse verschiedener Evaluationsstudien bestätigt. Die erwarteten Grundvorstellungen zu den einzelnen mathematischen Inhalten sind nicht oder nicht in ausreichendem Maß vorhanden.

Wenn von Grundvorstellungen die Rede ist, so liegt das Schwergewicht auf „Vorstellungen". Wir wollen nicht, dass unsere Schülerinnen und Schüler den mathematischen Stoff bloß unverstanden nachplappern, sondern wir wollen, dass sie sich darunter etwas vorstellen, d.h. mit den einzelnen Inhalten Bedeutungen verbinden. Einige dieser Vorstellungen sind in Hinblick auf Allgemeinbildung so bedeutsam, dass man sie eben als **Grundvorstellungen** bezeichnet. Wer sich für Details - etwa Grundvorstellungslisten zu einzelnen Inhalten, Ergebnisse empirischer Untersuchungen oder Kontrollaufgaben - interessiert, kann diese bei den Autoren über die Kommunikationsplattform auf der Homepage des Lehrwerks anfordern.

Im Folgenden soll an drei Beispielen aus der fünften Klasse gezeigt werden, wie in dem Lehrbuch eine Sicherstellung der Grundbildung angestrebt wird.

Erstes Beispiel: Prozentrechnen

Eines der deprimierendsten Ergebnisse der TIMSS-Studie und vieler anderer Studien war, dass unsere Maturanten und Maturantinnen bei einfachen Aufgaben zur Prozentrechnung sehr schlecht abgeschnitten haben. Das hat viele Ursachen, die seither auch vielfach analysiert wurden. Dabei sind immer wieder zwei Gründe genannt worden:
- Es fehlen die dem Prozentrechnen zugrunde liegenden **Grundvorstellungen**.
- Das Prozentrechnen wird in höheren Klassen **nicht mehr wiederholt**.

Ein Lehrbuch, das Anspruch auf didaktische Qualität erhebt, kann an diesen beiden Punkten nicht vorbeischauen und muss reagieren. In der fünften Klasse gibt es auch eine wunderbare Gelegenheit, das Prozentrechnen zu wiederholen und allfällige Defizite aus der Unterstufe auszugleichen, nämlich im Rahmen des vom Lehrplan geforderten Aufstellens und Interpretierens von Formeln.

Sehen wir uns zunächst eine typische Unterstufenaufgabe an (bei der nachweislich manche Maturantinnen und Maturanten schon Schwierigkeiten haben):

Aufgabe: Bei einer Führerscheinkontrolle wurde festgestellt, dass 8% von 250 kontrollierten Personen ohne Führerschein waren. Wie viele Personen waren das?
In der Unterstufe wird eine solche Aufgabe im Allgemeinen durch eine so genannte „Schlussrechnung" gelöst:

$$
\begin{array}{rll}
100\% & \ldots\ldots\ 250 & \text{Personen} \\
1\% & \ldots\ldots\ \frac{250}{100} & \text{Personen} \\
8\% & \ldots\ldots\ \frac{250}{100} \cdot 8 = 20 & \text{Personen}
\end{array}
$$

Das ist durchaus in Ordnung. Jeder Unterstufenabgänger sollte diese Aufgabe so lösen können. Aber für einen Oberstufenabgänger ist diese Lösungsmethode schon fast ein wenig rückständig. Denn er hat in der Zwischenzeit ein viel kraftvolleres Werkzeug kennen gelernt, mit dem man solche Aufgaben lösen kann, nämlich die **Variablen**. Laut Lehrplan soll mit Variablen ja schon ab der ersten Klasse gearbeitet werden und es ist in der fünften Klasse höchste Zeit, dass man lernt, Prozentaufgaben auch mit Variablen zu lösen. Das ist in der Tat sehr einfach. Man braucht dazu lediglich zwei Grundvorstellungen, die im Buch zunächst hervorgehoben werden:

Grundvorstellungen (Grundwissen) zum Prozentrechnen:

$$1\% = \frac{1}{100}, \quad a\% \text{ von } b = \frac{a}{100} \text{ von } b = \frac{a}{100} \cdot b$$

Das Erstaunliche daran ist, dass man mit diesen beiden Grundvorstellungen und mit minimalen Kenntnissen der Buchstabenrechnung alle in der Schule üblichen Prozentaufgaben lösen kann. Der Grund dafür liegt darin, dass jeder elementaren Prozentaufgabe dieselbe Beziehung zugrunde liegt, nämlich eine Beziehung der Form:

x% von y sind z

Von den Zahlen x, y, z sind zwei gegeben und die dritte ist gesucht. Je nachdem, welche Zahlen gegeben sind, ergeben sich drei Aufgabentypen, die im Buch an Musterbeispielen vorgeführt werden:

4.21 Bei einer Fahrscheinkontrolle wurde festgestellt, dass 8% von 250 kontrollierten Personen ohne Fahrschein waren? Wie viele Personen waren das?

Lösung: x% von y sind z
8% von 250 = z
$\frac{8}{100} \cdot 250 = z$
z = 20 (Personen)

4.22 Von 300 Mitarbeitern eines Betriebes sind 135 Raucher. Wie viel Prozent aller Mitarbeiter sind dies?

Lösung: x% von y sind z
x% von 300 sind 135
$\frac{x}{100} \cdot 300 = 135$
x = 45 (%)

4.23 Bei einer Lebensmitteluntersuchung wurde festgestellt, dass 25 Proben, das sind 6,25% der untersuchten Proben, verdorben waren. Wie viele Proben wurden untersucht?

Lösung: x% von y sind z
6,25% von y sind 25
$\frac{6{,}25}{100} \cdot y = 25$
y = 400 (Proben)

Wir sehen: Man braucht zur Lösung dieser Aufgaben keine speziellen Vokabeln wie „Grundwert", „Prozentanteil", „Prozentsatz" o.ä. und auch keine auswendig gelernte Formel wie etwa $A = \frac{p}{100} \cdot G$. Solche unverstandenen Vokabeln und unverstandenen Formeln verwirren nur und erzeugen Fehler. Unseres Erachtens liegt darin einer der Gründe, warum unsere Schüler bei Prozentaufgaben so schlecht abschneiden.

In dem Lehrbuch gehen wir aber noch einige Schritte weiter. Wir lassen weitere Formeln zur Prozentrechnung aufstellen und interpretieren, wiederholen den Begriff des relativen Anteils und arbeiten insbesondere heraus, dass eine Vermehrung um p% einer Multiplikation mit

$(1+\frac{p}{100})$ und eine Verminderung um p% einer Multiplikation mit $(1-\frac{p}{100})$ entspricht. Dies wird u.a. auf Verzinsungsprobleme angewandt. All dies wird uns in der 6. Klasse noch gute Dienste leisten, nämlich bei der Behandlung der Exponentialfunktionen und bei den vom Lehrplan geforderten Anwendungen aus dem Bankwesen.

Zweites Beispiel: Direkte Proportionalität

Man lernt hier nichts wesentlich Neues, weil die direkte Proportionalität ja bereits in der Unterstufe breit behandelt wurde, z.B. die direkte Proportionalität von Preis und Warenmenge, von Weg und Zeit usw. Neu ist jedoch jetzt, dass wir das Bekannte in der abstrakten Sprache der Funktionenlehre ausdrücken.

Wir beginnen mit einer Aufgabe, die sich an das Vorwissen aus der Unterstufe anlehnt:

8.01 Eine Ware kostet 5 € pro Kilogramm. Es sei P(x) der Preis für x Kilogramm dieser Ware.

1) Ermittle eine Termdarstellung der Funktion P, die jeder Warenmenge x den Preis P(x) zuordnet und zeichne ihren Graphen.

2) Zeige: Der doppelten, dreifachen, halben, a-fachen Warenmenge entspricht der doppelte, dreifache, halbe, a-fache Preis.

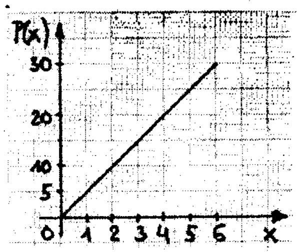
3) Zeige: Der Summe zweier Warenmengen entspricht die Summe der Preise.

4) Wie groß ist P(1)? Was bedeutet P(1)?

5) Was lässt sich über den Quotienten $\frac{P(x)}{x}$ aussagen?

Lösung:

1) P: $[0;c] \to \mathbb{R}$ mit $P(x) = 5 \cdot x$
Dabei hängt die Schranke c von der Verfügbarkeit der Warenmenge ab.



2) $P(2 \cdot x) = 5 \cdot (2 \cdot x) = 2 \cdot (5 \cdot x) = 2 \cdot P(x)$
$P(3 \cdot x) = 5 \cdot (3 \cdot x) = 3 \cdot (5 \cdot x) = 3 \cdot P(x)$
$P(\frac{1}{2} \cdot x) = 5 \cdot (\frac{1}{2} \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot P(x)$
$P(a \cdot x) = 5 \cdot (a \cdot x) = a \cdot (5 \cdot x) = a \cdot P(x)$

3) Sind x und y zwei Warenmengen, dann gilt:
$P(x+y) = 5 \cdot (x+y) = 5 \cdot x + 5 \cdot y = P(x) + P(y)$

4) $P(1) = 5 \cdot 1 = 5$. P(1) ist der Kilogrammpreis der Ware.

5) $\frac{P(x)}{x} = \frac{5 \cdot x}{x} = 5$. Der Quotient $\frac{P(x)}{x}$ ist konstant, er ist für jede Warenmenge x gleich dem Kilogrammpreis 5.

In dieser Aufgabe wird bereits alles Wesentliche angeschnitten, was zur unverzichtbaren Grundbildung in Bezug auf direkte Proportionalität gehört. Das sind nämlich gerade die fünf in der Aufgabe enthaltenen Punkte. Der Zugang zu diesen Punkten ist geradlinig. Es wird direkt auf sie zugesteuert, ohne sich dabei irgendwie zu verzetteln. Es wird alles vermieden, was die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler vom Wesentlichen ablenken könnte. Auch Fragen der Modellbildung werden zunächst ausgeklammert (die Warenmenge-Preis-Funktion ist ja in Wirklichkeit eine Treppenfunktion). Später wird natürlich ausführlich auf diese Probleme eingegangen, es gibt sogar einen eigenen Abschnitt zu Funktionen als mathematische Modelle. Zunächst aber würde dies die Konzentration auf das Wesentliche stören.

Das unverzichtbare Grundwissen zur direkten Proportionalität wird allerdings in der obigen Aufgabe bloß in einem konkreten Sachzusammenhang dargestellt, eingekleidet in eine Preis-Warenmenge-Situation. In der Unterstufe mag dies genügen, in der Oberstufe müssen wir jedoch einen Schritt weiter gehen und die wesentlichen Punkte in der abstrakten Sprache der Funktionenlehre formulieren und begründen. Wir beginnen mit einer klaren Definition von direkter Proportionalität:

Definition: Gilt für eine reelle Funktion $f: A \to R$ stets $\mathbf{f(x) = k \cdot x}$ (mit $k \neq 0$), so sagt man, **die Funktionswerte f(x) sind zu den Argumenten x direkt proportional.** Die Funktion f nennt man eine **direkte Proportionalitätsfunktion.** Die Konstante k heißt **Proportionalitätsfaktor**.

Anschließend werden die in der obigen Aufgabe angesprochenen Punkte allgemein formuliert:

Satz: Ist f eine direkte Proportionalitätsfunktion mit $f(x) = k \cdot x$ $(k \neq 0)$, dann gilt:

(1) $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$.
[In Worten: Dem a-fachen Argument entspricht der a-fache Funktionswert.]

(2) $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
[In Worten: Der Summe der Argumente entspricht die Summe derFunktionswerte.]

(3) $k = f(1)$
[In Worten: Der Proportionalitätsfaktor ist der Funktionswert an der Stelle 1.]

(4) $\frac{f(x)}{x} = k$ (für $x \neq 0$)
[In Worten: Der Quotient aus Funktionswert und Argument ist konstant.]

Beweis:

(1) $f(a \cdot x) = k \cdot (a \cdot x) = a \cdot (k \cdot x) = a \cdot f(x)$

(2) $f(x+y) = k \cdot (x+y) = k \cdot x + k \cdot y = f(x) + f(y)$

(3) $f(1) = k \cdot 1 = k$

(4) $\frac{f(x)}{x} = \frac{k \cdot x}{x} = k$. □

Aus $f(x) = k \cdot x$ (mit $k \neq 0$) folgt $x = \frac{1}{k} \cdot f(x)$. Es gilt somit:
Sind die Funktionswerte zu den Argumenten direkt proportional, dann sind auch die Argumente zu den Funktionswerten direkt proportional (wobei der neue Proportionalitätsfaktor der Kehrwert des alten ist). Kurz: Die Funktionswerte und die Argumente sind zueinander direkt proportional.

Schließlich wird noch gezeigt:

Satz: Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = k \cdot x$ ist eine Gerade durch den Ursprung.

Dieser Satz wird auch bewiesen. Auf den Beweis gehen wir aber hier nicht ein.

Vor diesen abstrakten mathematischen Beschreibungen von direkter Proportionalität in der Funktionensprache braucht niemand Angst zu haben. Im Gegenteil: sie lenken die Aufmerksamkeit auf jene Punkte, die aus der Sicht der Lehrenden als wichtig erachtet werden und helfen damit den Lernenden, die Sache besser zu verstehen. Letzten Endes wollen wir natürlich erreichen, dass die Schülerinnen und Schüler das Gelernte nicht nur in der Funktionensprache beschreiben können, sondern das Gelernte auch anwenden können. Deshalb folgen in dem Buch sehr viele Anwendungsaufgaben, die Gelegenheit geben, das Gelernte in konkreten Situationen zu interpretieren.

Dieses Anwenden soll noch kurz aus kognitionspsychologischer Sicht beleuchtet werden. Es gibt in der heutigen Kognitionspsychologie im Wesentlichen zwei Ansätze, die erklären, wie man Wissen von einer Situation in andere Situationen übertragen kann. Die eine Theorie geht davon aus, dass man eine neue Situation S, mit der man konfrontiert wird, mit einer **prototypischen Situation** P vergleicht (Abb. 2a). Eine solche prototypische Situation für direkte Proportionalität kann beispielsweise eine Preis-Warenmenge-Situation sein. Neue Situationen werden mit dieser prototypischen Situation verglichen und auf diese Weise ist man imstande, Probleme zur direkten Proportionalität auch in der jeweils neuen Situation zu bewältigen. Die andere Theorie geht davon aus, dass für unterschiedliche Situationen S_1 und S_2 ein **gemeinsamer, abstrakter Überbau** gebildet wird (Abb. 2b). Dadurch erkennt man, dass beide Situationen mit direkter Proportionalität zu tun haben und kann das abstrakte Wissen in beiden Situationen anwenden.

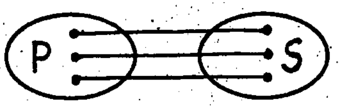


Abb. 2a
Vergleich mit einer prototypischen Situation

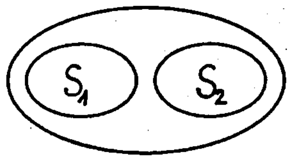


Abb. 2b
Gemeinsamer Überbau

Diese beiden Theorien schließen einander nicht aus, sondern ergänzen sich in hervorragender Weise. Man tut also gut daran, beide Theorien zu beherzigen. Das haben wir im vorliegenden Fall auch getan. Wir bieten den Lernenden einerseits eine prototypische Situation an, nämlich die Preis-Warenmenge-Aufgabe, die bereits alles Wesentliche enthält und mit der andere Aufgaben verglichen werden können. Andererseits stellen wir das grundlegende Wissen über direkte Proportionalität auch in abstrakter mathematischer Form (in der Funktionensprache) dar und stellen damit einen abstrakten Überbau zur Verfügung.

Drittes Beispiel: Die Funktionensprache

Die Schwierigkeiten, die die Sprache und die Symbolik der Funktionenlehre den Schülerinnen und Schülern bereiten, werden im Allgemeinen gewaltig unterschätzt. Die Funktionensprache ist für die Schülerinnen und Schüler eine neue Sprache, wie eine Fremdsprache. Man kann nicht erwarten, dass sie diese über Nacht erlernen. Wir wissen in der Tat aus zahlreichen empirischen Untersuchungen, dass ein wirkliches Verstehen dieser Sprache seine Zeit braucht. Erfahrene Lehrerinnen und Lehrer wissen beispielsweise, dass es oft lange dauert, bis manche Schülerinnen und Schüler die einfache Schreibweise $f(4) = 3$ sicher lesen können, nämlich: Der Wert der Funktion f an der Stelle 4 ist 3. Welche Schwierigkeiten ein verständiges Umgehen mit der Sprache und Symbolik der Funktionen bereitet, sieht man auch an mannigfachen Beispielen aus unseren eigenen empirischen Untersuchungen. Selbst bei

Maturantinnen und Maturanten konnten wir noch häufig Schreibweisen der folgenden Art beobachten, die zeigen, dass die Funktionenschreibweise nicht wirklich verstanden wurde:

- $f(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- $f'(x) = \lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$
- Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $g(x)$ berechnet man ......

Um die Situation zu verbessern, haben wir in das Buch der 5. Klasse einen Abschnitt aufgenommen, in dem nichts anderes geübt werden soll wie die Übersetzung von der Umgangssprache in die Funktionensprache und umgekehrt. Ein Beispiel dazu:

7.05 Inas Körpergröße wird jedes Jahr an ihrem Geburtstag gemessen. Die Funktion G ordne jedem Alter t Inas Körpergröße G(t) zu (t in Jahren, G(t) in cm). Beschreibe mit Hilfe der Funktionssymbolik:
a) An ihrem 13. Geburtstag war Ina 144 cm groß.
b) An ihrem 15. und ihrem 16. Geburtstag war Ina gleich groß.
c) An ihrem 17. Geburtstag war Ina noch keine 165 cm groß.
d) Irgendwann nach ihrem 17. Geburtstag ist Ina noch gewachsen.

Lösung: **a)** $G(13) = 144$ **c)** $G(17) < 165$
b) $G(15) = G(16)$ **d)** Es gibt ein $t > 17$ mit $G(t) > G(17)$

Anschließend folgen viele ähnliche Aufgaben, auch solche, in denen die Funktionenschreibweise in die Umgangssprache übersetzt werden soll. Zum Beispiel:

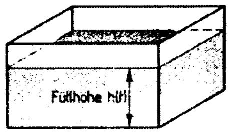
7.11 Es sei f eine reelle Funktion. Drücke in Worten aus:

a) $2 \cdot f(x) = f(2x)$	**c)** $f(x) > f(y)$	**e)** $f(x+1) = 2x$	**g)** $f(x+y) = f(x) + f(y)$
b) $f(x) > 0$	**d)** $f(x) < 5$	**f)** $f(x) < x$	**h)** $f(x) = 2 \cdot f(x)$

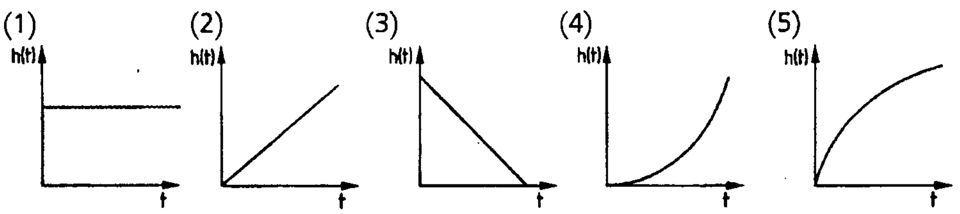
Viertes Beispiel: Zeichnen und Interpretieren von Funktionsgraphen.

Aus zahlreichen empirischen Untersuchungen (u.a. auch TIMSS) wissen wir, dass selbst Maturantinnen und Maturanten damit noch große Schwierigkeiten haben. Wir haben diesem Thema daher in dem Buch relativ breiten Raum gewährt. Ein Beispiel:

Füllvorgänge



7.26 Ein Gefäß wird gleichmäßig mit Wasser gefüllt. Die Funktion h, die jedem Zeitpunkt t die Höhe h(t) im Gefäß zuordnet, bezeichnen wir im Folgenden der Kürze halber als **Füllfunktion**.
Welcher der folgenden Graphen kommt als Füllfunktion eines quaderförmigen Aquariums in Frage? Begründe, warum die übrigen Graphen nicht in Frage kommen.



Noch ein Beispiel:

Ein häufiger Fehler beim Interpretieren von Funktionsgraphen

7.17 In Abb. 7.12 ist die Zeit-Ort-Funktion eines Autos dargestellt. Fährt das Auto eine Linkskurve?

Lösung: Mit zunehmender Zeit nimmt der zurückgelegte Weg zu und zwar immer stärker. Über den Verlauf der Straße wird aber nichts ausgesagt, auch wenn der Graph in Abb.9 eine Ähnlichkeit mit einer Linkskurve hat.

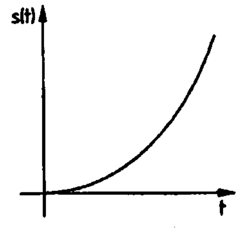


Abb. 7.12

Dieser Fehler besteht darin, dass ein Funktionsgraph als fotografisches Abbild einer bestimmten Situation aufgefasst wird (z.B. als Bild einer Linkskurve). Eine Situation wird aber durch einen Funktionsgraphen nicht direkt dargestellt, sondern über einen Zwischenschritt. Die Situation wird in einem ersten Schritt durch eine Menge von Zahlenpaaren beschrieben, diese wird dann in einem zweiten Schritt durch den Graphen dargestellt.

Situation ↔ Menge von Zahlenpaaren ↔ Graph (Schaubild)

Fünftes Beispiel: Zuordnung und Veränderung

Aus einem Funktionsgraphen kann man vieles herauslesen. Wichtig ist, dass man zwei Typen von Fragen beantworten kann:

Zuordnung: Welcher Funktionswert gehört zu einem bestimmten Argument? (Abb. 7.7)
Welche Argumente gehören zu einem bestimmten Funktionswert? (Abb. 7.8)
Veränderung: Wie ändern sich die Funktionswerte, wenn die Argumente in bestimmter Weise verändert werden? (Abb. 7.9)
Wie ändern sich die Argumente, wenn die Funktionswerte in bestimmter Weise verändert werden? (Abb. 7.9)

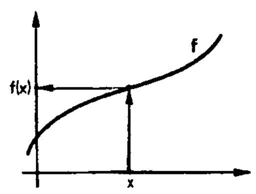


Abb. 7.7

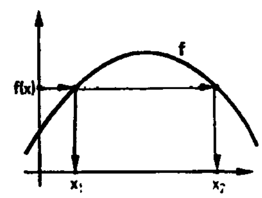


Abb. 7.8

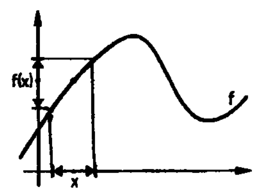


Abb. 7.9

In der fachdidaktischen Literatur sind diese beiden Aspekte unter den Namen „Zuordnungsaspekt“ und „Kovariationsaspekt“ bekannt. Aus zahlreichen empirischen Untersuchungen weiß man, dass vor allem der Kovariationsaspekt bei Schülerinnen und Schülern unterentwickelt ist. Sie können zwar zu vorgegebenen Argumenten die Funktionswerte ablesen und umgekehrt zu vorgegebenen Funktionswerten die Argumente bestimmen, haben aber Schwierigkeiten, den Verlauf von Funktionsgraphen global und dynamisch zu beschreiben.

Um den Kovariationsaspekt zu stärken, haben wir spezifische Software entwickelt, die wir auf unserer Homepage anbieten. Um eine Vorstellung davon zu vermitteln, seien hier zwei Beispiele herausgegriffen und kurz beschrieben. Dem Computer ist eine bestimmte Funktion einprogrammiert, die aber dem Benutzer unbekannt ist. Auf dem Bildschirm erscheinen zwei Achsen mit Schiebereglern (siehe Abb.3). Mit der Maus kann man den Punkt auf der x-Achse bewegen und beobachten, wie sich der Punkt auf der f(x)-Achse mitbewegt. Daneben erscheint ein Koordinatensystem, in das der Benutzer mit der Maus einen Graphen dieser Funktion einzeichnen kann. In einer Variante dieses Programms kann man mit der Maus den Punkt auf der ersten Achse bewegen und beobachten, wie sich der Punkt auf der zweiten Achse mitbewegt. Auch hier kann der Benutzer mit der Maus einen Funktionsgraphen einzeichnen, der ihm passend erscheint. Auf Knopfdruck erscheint jeweils neben dem gezeichneten Graphen der richtige Graph und man kann überprüfen, wie nahe man dem richtigen Graphen gekommen ist. Mit einem weiteren Knopfdruck kann eine weitere Funktion aufgerufen und das Spiel wiederholt werden. (Die Lehrperson kann auch selbst eine Funktion eingeben.) Dieses Programm dient zum besseren Verstehen der „Grundbewegungen", die einer dynamischen Interpretation eines Funktionsgraphen zugrunde liegen (siehe Abb. 4).

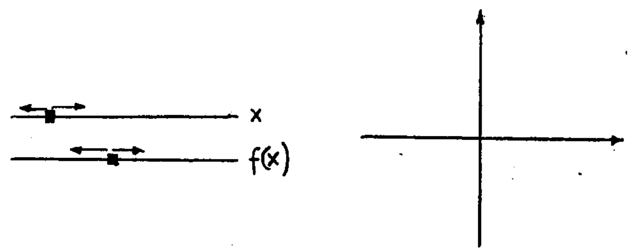


Abb.3 Ein Schiebereglerprogramm

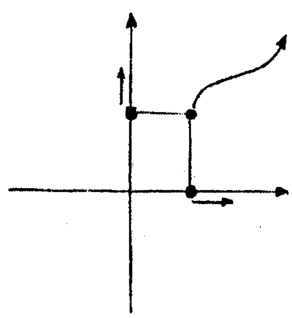


Abb. 4 Grundbewegungen zum Kovariationsaspekt

Literatur

MALLE, G./RAMHARTER, E./ULOVEC, A./KANDL, S.:
Mathematik verstehen 5, öbv&hpt Verlag, Wien 2004
Mathematik verstehen 6, öbv&hpt Verlag, Wien 2005
Mathematik verstehen 7, öbv&hpt Verlag, Wien 2006
Mathematik verstehen 8, öbv&hpt Verlag, Wien 2007

Homepage: http://www.math.univie.ac.at/mv